Le problème est composé de trois parties indépendantes, pouvant éventuellement être traitées dans un ordre différent de celui de l'énoncé.

Première Partie

1) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ deux nombres tels que $a > 0$, $b \neq 0$ et $|b/a| < 1$. On considère la fonction de $\phi \in \mathbb{R}$ définie par

$$f(\phi) = \frac{1}{a + b\cos\phi}.$$

Commentaire : Dans toute la suite du problème, on admettra les formules

$$\cos\phi = \frac{1}{2}\left(e^{i\phi} + e^{-i\phi}\right) \quad \text{et} \quad \sin\phi = \frac{1}{2i}\left(e^{i\phi} - e^{-i\phi}\right) \quad \text{pour } \phi \in \mathbb{R}.$$

Si f est une fonction bornée de la variable réelle ϕ, on notera $\sup_{\phi \in \mathbb{R}} f(\phi)$ la borne supérieure de l'ensemble des valeurs prises par $f(\phi)$ sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer qu'il existe des constantes réelles β et B, dont on précisera l'expression en fonction de a et b, telles que

$$f(\phi) = \frac{2z}{B(z-\beta)(z-\beta^{-1})}, \quad \text{avec} \quad z = e^{i\phi} \quad \text{et} \quad |\beta| < 1.$$

b) Montrer que les sommes

$$\sum_{n=0}^{N} \beta^n e^{in\phi} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{N} \beta^n e^{-in\phi}$$

ont des expressions simples en fonction de N, β, $e^{i\phi}$ et $e^{-i\phi}$. En déduire que les séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n e^{in\phi} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n e^{-in\phi}$$

sont convergentes, et montrer que leurs sommes s'expriment de manière simple en fonction de β, $e^{i\phi}$ et $e^{-i\phi}$.

c) Etablir l'identité

$$\frac{1}{a + b\cos\phi} = A(a,b)\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \beta^n \cos n\phi\right),$$

où $A(a, b)$ est une constante dont on donnera l'expression en fonction de a et b.

d) Montrer qu'il existe une suite u_N telle que $\lim_{N\to\infty} u_N = 0$ et vérifiant, pour tout $N \geq 1$, l'inégalité

$$\sup_{\phi\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{a+b\cos\phi} - A(a,b)\left(1+2\sum_{n=1}^{N}\beta^n\cos n\phi\right)\right| \leq u_N.$$

e) En déduire la valeur, exprimée en fonction de $A(a, b)$, de l'intégrale

$$\int_0^{\pi}\frac{d\phi}{a+b\cos\phi}.$$

2) Soit α un nombre réel tel que $0 < \alpha < \pi$.

a) Etablir la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$ de la fraction rationnelle

$$\frac{1}{1-2x\cos\alpha+x^2}.$$

b) Etablir la majoration : pour tout $N \geq 1$, $|\rho| < 1$ et $0 < \alpha < \pi$,

$$\left|\frac{1}{1-2\rho\cos\alpha+\rho^2} - \sum_{n=0}^{N}\rho^n\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}\right| \leq \frac{2|\rho|^{N+1}}{(1-|\rho|)^2\sin\alpha}.$$

3) On considère trois constantes réelles μ_1, μ_2 et ρ, vérifiant les inégalités

$$-1 \leq \mu_1 < \mu_2 \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \rho < 1.$$

On définit des constantes a et b et une fonction $\xi = \xi(\phi)$ de $\phi \in \mathbb{R}$ par

$$a = 2\left(1-\rho(\mu_1+\mu_2)+\rho^2\right), \quad b = 2\rho(\mu_1-\mu_2) \quad \text{et} \quad \xi = \frac{1}{2}\left\{\mu_1+\mu_2-(\mu_1-\mu_2)\cos\phi\right\}.$$

a) Exprimer de manière simple en fonction de μ_1, μ_2, ρ et ξ les quantités $a+b$, $a-b$ et $a+b\cos\phi$. En déduire l'identité

$$\int_0^{\pi}\frac{d\phi}{1-2\rho\xi(\phi)+\rho^2} = \frac{\pi}{\sqrt{\left(1-2\rho\mu_1+\rho^2\right)\left(1-2\rho\mu_2+\rho^2\right)}}.$$

b) Exprimer $1+\cos\phi$ et $1-\cos\phi$ de manière simple en fonction de μ_1, μ_2 et ξ. En déduire l'expression de $\sin\phi$ en fonction de μ_1, μ_2 et ρ lorsque $\phi \in [0, \pi]$.

c) Comparer les expressions

$$\int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{d\xi}{(1-2\rho\xi+\rho^2)\sqrt{(\mu_2-\xi)(\xi-\mu_1)}} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{\sqrt{(1-2\rho\mu_1+\rho^2)(1-2\rho\mu_2+\rho^2)}}.$$

d) On pose désormais $\mu_1=\cos\theta$, avec $0<\theta<\pi$, $\mu_2=1$ et $\xi=\cos\alpha$. Etablir l'identité

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\theta} \frac{(1-\rho)\cos\frac{\alpha}{2}\,d\alpha}{(1-2\rho\cos\alpha+\rho^2)\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\theta)}} = \frac{1}{\sqrt{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}},$$

pour tout $0\le\rho<1$ et $0<\theta<\pi$.

e) Etablir, en justifiant l'existence de la convergence de la série du membre de droite, l'identité

$$\frac{(1-\rho)\cos\frac{\alpha}{2}}{1-2\rho\cos\alpha+\rho^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha \quad \text{pour} \quad |\rho|<1 \quad \text{et} \quad 0<\alpha<\pi.$$

f) Déterminer un majorant de

$$\left|\frac{(1-\rho)\cos\frac{\alpha}{2}}{1-2\rho\cos\alpha+\rho^2} - \sum_{n=0}^{N}\rho^n\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\right|,$$

qui soit indépendant de $\alpha\in]0,\pi[$ et qui tende vers 0 lorsque $N\to\infty$.

g) Soit θ un nombre réel tel que $0<\theta<\pi$. On considère la suite v_n définie par

$$v_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\theta}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\theta)}}\,d\alpha.$$

Montrer que v_n est définie pour tout $n\in\mathbb{N}$, et qu'il existe un nombre $M<\infty$ (dépendant de θ) tel que $|v_n|\le M$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Montrer que, pour tout $|\rho|<1$ et $0\le\theta\le\pi$, on a

$$\lim_{N\to\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}} - \sum_{n=0}^{N}\rho^n\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\theta}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\theta)}}\,d\alpha\right\}\right| = 0.$$

4) Pour $0 < \theta < \pi$ fixé, on considère la fonction de $x \in \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2x\cos\theta + x^2}}.$$

a) Montrer que g est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Vérifier que si $g^{(n)}$ désigne la dérivée n^ième de g, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$g^{(n)}(0) = n!\, P_n(\cos\theta),$$

où P_n est un polynôme de degré n.

b) Etablir que, pour tout $0 < \theta < \pi$ et $|\rho| < 1$, on a l'identité

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n P_n(\cos\theta).$$

c) Vérifier qu'il existe un $\varepsilon_0 > 0$ et une constante $D < \infty$ tels que, pour tout $N \geq 1$, $|\rho| \leq \varepsilon_0$ et $0 < \theta < \pi$,

$$\left| \frac{1}{\sqrt{1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2}} - \sum_{n=0}^{N-1} \rho^n P_n(\cos\theta) \right| \leq D|\rho|^N.$$

Deuxième Partie

1) Soit $h(x) = (1-x)^{-1/2}$ pour $x \in]-1, 1[$.

a) Vérifier que h est indéfiniment différentiable sur $]-1, 1[$. Si $h^{(n)}$ désigne la dérivée n^ième de h, déterminer $h^{(n)}(x)$ et $h^{(n)}(0)$ en fonction de $(1-x)^{-n-1/2}, 2^{2n}, n!$ et $(2n)!$

b) Montrer qu'il existe une constante $K < \infty$ telle que, pour tout $N \geq 1$ et $|x| \leq \frac{1}{2}$, on ait

$$\left| \frac{1}{\sqrt{1-x}} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x^n}{n!} h^{(n)}(0) \right| \leq K \frac{(2N)!}{2^N (N!)^2} |x|^N.$$

c) En déduire qu'il existe un $\varepsilon > 0$, et pour tout $N \geq 1$, une constante $C_N < \infty$, tels que, pour tout $|\rho| \leq \varepsilon$ et $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\left| \frac{1}{\sqrt{1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2}} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\{\rho(2\cos\theta - \rho)\}^n}{n!} h^{(n)}(0) \right| \leq C_N |\rho|^N.$$

Commentaire. Dans la suite du problème, on admettra le résultat de la question I-4) c), à savoir qu'il existe un $\varepsilon_0 > 0$ et une constante $D < \infty$ tels que, pour tout $N \geq 1$, $|\rho| \leq \varepsilon_0$ et $0 < \theta < \pi$, on a l'inégalité

$$\left| \frac{1}{\sqrt{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}} - \sum_{n=0}^{N-1} \rho^n P_n(\cos\theta) \right| \leq D|\rho|^N.$$

2) a) Montrer que

$$P_n(x) = a_n\left(x^n + b_{n,1}\, x^{n-2} + \ldots + b_{n,k}\, x^{n-2k} + \ldots\right),$$

où a_n et $\left\{b_{n,k} : 1 \leq k \leq n/2\right\}$ sont des constantes que l'on déterminera.

b) Vérifier que les polynômes P_n, $n = 0, 1, \ldots$, sont liés par les relations de récurrence

$$P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = (n+1)P_n(x).$$

Troisième Partie.

Cette partie a pour objet de calculer numériquement l'intégrale

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{2+\cos\phi}$$

par une méthode de quadrature basée sur les sommes de Riemann.

1) A l'aide du changement de variable $t = \tan\left(\frac{1}{2}\phi\right)$, exprimer I sous la forme

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{Q(t)}$$

où Q est une fonction que l'on précisera.

2) Donner, dans un langage informatique proche du Pascal, un programme permettant de calculer

$$I'_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{Q\left(\frac{i}{N}\right)} \quad \text{et} \quad I''_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{Q\left(\frac{i-1}{N}\right)},$$

en fonction de $N \geq 1$.

3) Ecrire un programme, dans un langage informatique proche du Pascal, permettant de calculer I à 10^{-M} près $(1 \leq M \leq 6)$.